第 13 回：弾力性の推定

【教科書第 7 章】

北村　友宏

2021 年 1 月 8 日

本日の内容

1. 弾力性の推定

2. gretl を用いた実習

弾力性の推定

説明変数と被説明変数の自然対数をとった単回帰モデル

$$
\begin{aligned}
\ln y_i &= \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + u_i, \\
E(u_i \mid x_i) &= 0, \\
E(u_i u_j \mid x_i) &= 0 \quad (i \neq j), \\
V(u_i \mid x_i) &= \sigma^2, \\
i &= 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}
$$

を推定することを考える．

- $\ln y_i$ や $\ln x_i$ はそれぞれ，$\ln$ まで含めて 1 つの変数と考えれば，線形回帰モデルと同様の手法で推定できる．

- 回帰係数 β_1 は，$\ln y_i$ を $\ln x_i$ で微分したものと考えることもできる．つまり，

$$\beta_1 = \frac{d \ln y_i}{d \ln x_i}.$$

  - 「$\ln x_i$ で微分」と書くと「関数で微分」という書き方になり，数学的に良くないが，ここでは視覚的に分かりやすくするため，$\ln x_i$ を 1 つの変数と考えてこの表記をする．

$$\frac{d\ln y_i}{d\ln x_i} = \frac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}.$$

（証明）

$$\begin{aligned}\frac{d\ln y_i}{d\ln x_i} &= \frac{d\ln y_i}{dy_i}\cdot\frac{dy_i}{dx_i}\cdot\frac{dx_i}{d\ln x_i}\\ &= \frac{d\ln y_i}{dy_i}\cdot\frac{dy_i}{dx_i}\cdot\frac{1}{\frac{d\ln x_i}{dx_i}}.\end{aligned}$$

ここで，自然対数の微分の公式から，

$$\frac{d\ln y_i}{dy_i} = \frac{1}{y_i}, \quad \frac{d\ln x_i}{dx_i} = \frac{1}{x_i}$$

なので，

$$\frac{d\ln y_i}{dy_i}\cdot\frac{dy_i}{dx_i}\cdot\frac{1}{\frac{d\ln x_i}{dx_i}}=\frac{1}{y_i}\cdot\frac{dy_i}{dx_i}\cdot\frac{1}{\frac{1}{x_i}}$$
$$=\frac{1}{y_i}\cdot\frac{dy_i}{\frac{dx_i}{x_i}}$$
$$=\frac{dy_i}{y_i}\cdot\frac{1}{\frac{dx_i}{x_i}}$$
$$=\frac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}.$$

したがって，$\dfrac{d\ln y_i}{d\ln x_i}=\dfrac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}$ である．（証明終）

以上より，$\beta_1 = \dfrac{d \ln y_i}{d \ln x_i} = \dfrac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}$.

- dx_i: x_i が微小に増加したときの x_i の増加量
- dy_i: y_i が微小に増加したときの y_i の増加量
- $\dfrac{dx_i}{x_i}$:（x_i が微小に増加したときの）x_i の増加率
- $\dfrac{dy_i}{y_i}$:（y_i が微小に増加したときの）y_i の増加率

$$\Rightarrow \beta_1 = \frac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}} = \frac{（y_i\text{の増加率}）}{（x_i\text{の増加率}）}.$$

$\Rightarrow \beta_1$, つまり $\frac{\frac{dy_i}{y_i}}{\frac{dx_i}{x_i}}$ は，x_i が 1%増加したときに y_i が何%増加するかを表す．これを「y_i の x_i に対する弾力性（elasticity）」または「y_i の x_i 弾力性」という．

- e.g., 需要の価格に対する弾力性，需要の価格弾力性
- 弾力性が β_1 であれば，x_i が 1%増加すると y_i は β_1%増加する．

以上より，

$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

における $\ln x_i$ の回帰係数 β_1 は，「y_i の x_i に対する弾力性」.

➥ β_1 を推定すれば y_i の x_i に対する弾力性を推定できる.

- e.g., β_1 の OLS 推定値 $\hat{\beta}_1$ が，y_i の x_i に対する弾力性の推定値.

さらに，

$$H_0 : \beta_1 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_1 \neq 0$$

の仮説検定を行えば，弾力性が 0 と異なるか（y_i は x_i に反応するか）を検証できる.

回帰係数の解釈

対数変換していないものをレベル（level）という．
説明変数や被説明変数がレベルなのか対数値なのかによって，説明変数の回帰係数の解釈が異なる．

- Level-Level Model:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

  - β_1 の解釈：
    x_i が 1 単位増加すると y_i は β_1 単位増加する．

- Log-Log Model:

$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + u_i$$

  - β_1 の解釈：
    x_i が 1%増加すると y_i は β_1%増加する．
    （「$100 \times \beta_1$%」にしない！）

- Log-Level Model:

$$\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$$

  - β_1 の解釈：
    x_i が 1 単位増加すると y_i は $100 \times \beta_1$%増加する.
  - β_1 は y_i の x_i に対する半弾力性（semi-elasticity）.

- Level-Log Model:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + u_i$$

  - β_1 の解釈：
    x_i が 1%増加すると y_i は $\dfrac{1}{100} \times \beta_1$ 単位増加する.
  - あまり使われない.

対数変換したモデルを推定する目的

- 弾力性や半弾力性を推定するため

だけでなく，

- モデルの当てはまりを改善するため

に，Log-Log Model や Log-Level Model を推定する場合もある．

$$\Uparrow$$

変数を対数変換して Log-Log Model などを推定したほうが，Level-Level Model よりも R^2 や $\bar{R}^2$ が高くなったり回帰係数の統計的有意性が強まったりする場合がある．

gretl での変数の対数変換の方法

- gretl の画面上で，自然対数をとりたい変数を選択し，その上で右クリック→「対数を取る」と操作.
  - 対数変換された変数の名前の頭には l_ が付けられる.
- 「gretl」ウィンドウのメニューバーから「ファイル」→「データを保存」と操作し，必ずデータセットを上書き保存.

変数の観測値に 0 が含まれている場合

- 0 は対数変換できない．
  ➡ 観測値に 0 が含まれる変数を対数変換すると，0 の観測値が欠損になる．
  ➡ 観測値に 0 が含まれる変数は，レベルのまま使う．

中古マンションデータを用いた弾力性の推定

$$\ln price_i = \beta_0 + \beta_1 minutes_i + \beta_2 \ln age_i + \beta_3 \ln area_i + \beta_4 d_i + u_i \tag{1}$$

- $price_i$：中古マンション価格（万円）
- $minutes_i$：最寄り駅までの所要時間（分）
- age_i：築年数（年）
- $area_i$：面積（m^2）
- d_i：ワンルームダミー
- i：中古マンション番号

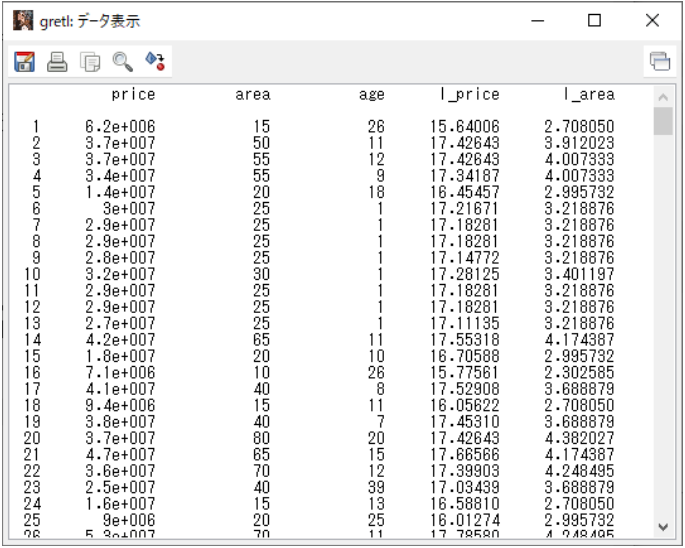
を推定する．

$minutes_i$ と d_i は観測値に 0 が含まれているため，対数変換しない．

実習 1

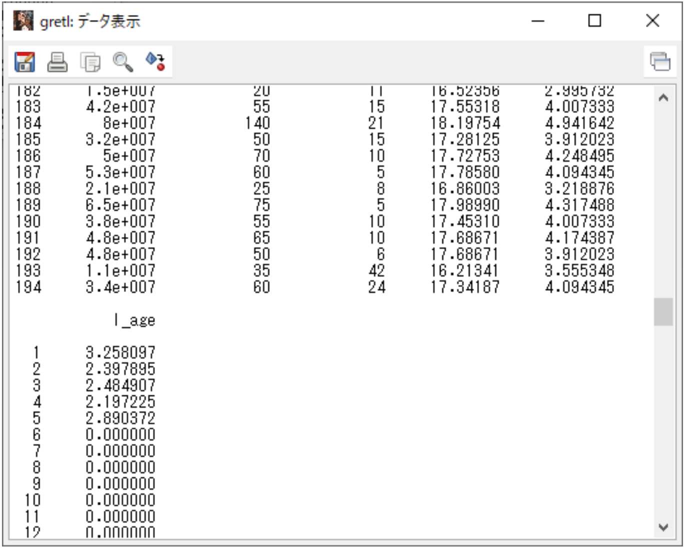
1. gretl を起動.
2. 「ファイル」→「データを開く」→「ユーザー・ファイル」と操作.
3. setagayaapartment.gdt を選択し，「開く」をクリック.
4. 「price」をクリックした後，Ctrl キーを押しながら「area」「age」をクリックして選択し，これらのうちどれか 1 つの変数名の上で右クリック→「対数を取る」と操作.
   - ここでは，「_10th」のついていない変数（万円単位ではなく円単位の中古マンション価格）を対数変換する.
   - l_price（price の自然対数），l_area（area の自然対数），l_age（age の自然対数）という名前の変数が作成される.

5. メニューバーから「ファイル」→「データを保存」と操作．これでデータセットが上書き保存される．
6. 「price」をクリックした後，Ctrl キーを押しながら「area」「age」「l_price」「l_area」「l_age」をクリックして選択し，これらのうちどれか 1 つの変数名の上で右クリック→「データ（値）を表示」と操作すると，これら 6 つの変数の観測値リストが新規ウィンドウにて表示される．



	price	area	age	l_price	l_area
1	6.2e+006	15	26	15.64006	2.708050
2	3.7e+007	50	11	17.42643	3.912023
3	3.7e+007	55	12	17.42643	4.007333
4	3.4e+007	55	9	17.34187	4.007333
5	1.4e+007	20	18	16.45457	2.995732
6	3e+007	25	1	17.21671	3.218876
7	2.9e+007	25	1	17.18281	3.218876
8	2.9e+007	25	1	17.18281	3.218876
9	2.8e+007	25	1	17.14772	3.218876
10	3.2e+007	30	1	17.28125	3.401197
11	2.9e+007	25	1	17.18281	3.218876
12	2.9e+007	25	1	17.18281	3.218876
13	2.7e+007	25	1	17.11135	3.218876
14	4.2e+007	65	11	17.55318	4.174387
15	1.8e+007	20	10	16.70588	2.995732
16	7.1e+006	10	26	15.77561	2.302585
17	4.1e+007	40	8	17.52908	3.688879
18	9.4e+006	15	11	16.05622	2.708050
19	3.8e+007	40	7	17.45310	3.688879
20	3.7e+007	80	20	17.42643	4.382027
21	4.7e+007	65	15	17.66566	4.174387
22	3.6e+007	70	12	17.39903	4.248495
23	2.5e+007	40	39	17.03439	3.688879
24	1.6e+007	15	13	16.58810	2.708050
25	9e+006	20	25	16.01274	2.995732

このような画面が表示されれば成功．7〜8 桁の変数も，対数変換すれば 2 桁になっていることが分かる．



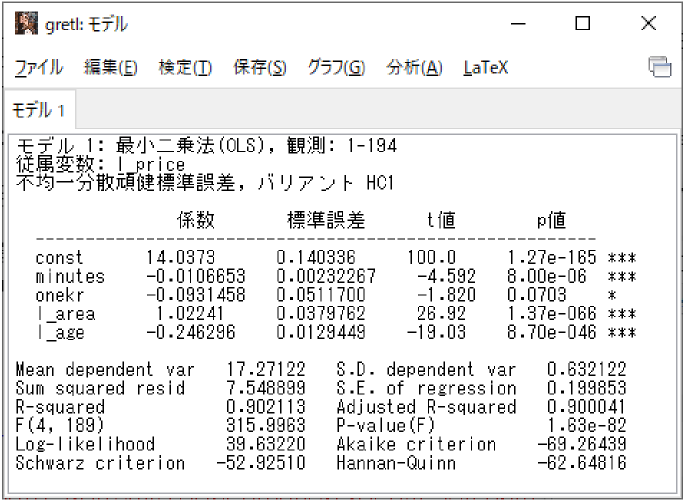
182	1.5e+007	20	11	16.52356	2.995732
183	4.2e+007	55	15	17.55318	4.007333
184	8e+007	140	21	18.19754	4.941642
185	3.2e+007	50	15	17.28125	3.912023
186	5e+007	70	10	17.72753	4.248495
187	5.3e+007	60	5	17.78580	4.094345
188	2.1e+007	25	8	16.86003	3.218876
189	6.5e+007	75	5	17.98990	4.317488
190	3.8e+007	55	10	17.45310	4.007333
191	4.8e+007	65	10	17.68671	4.174387
192	4.8e+007	50	6	17.68671	3.912023
193	1.1e+007	35	42	16.21341	3.555348
194	3.4e+007	60	24	17.34187	4.094345

	l_age
1	3.258097
2	2.397895
3	2.484907
4	2.197225
5	2.890372
6	0.000000
7	0.000000
8	0.000000
9	0.000000
10	0.000000
11	0.000000
12	0.000000

l_age は下のほうに表示されている．確認したら「gretl: データを表示」のウィンドウは閉じてよい．

7. gretl のメニューバーから「モデル」→「通常の最小二乗法」と操作.
8. 出てきたウィンドウ左側の変数リストにある l_price をクリックし，3 つの矢印のうち上の青い右向き矢印をクリック.
    - 推定式の左辺の変数（被説明変数，従属変数）が l_price（中古マンション価格の対数値）となる.

9. ウィンドウ左側の変数リストにある minutes をクリックした後，Ctrl キーを押しながら，onekr, l_area, l_age をクリックし，3 つの矢印のうち真ん中の緑の右向き矢印をクリック．
    - 推定式の右辺の変数（説明変数，独立変数）が minutes, onekr, l_area, l_age の 4 つとなる．
    - 最初から説明変数リストに入っている const は推定式の切片（定数項）のこと．
10. 「頑健標準誤差を使用する」にチェック．これで，推定式の誤差項 u_i のバラつき（分散）に関する仮定が誤っていても，より厳密な分析ができるようになる．
11. 「OK」をクリックすると，結果が新しいウィンドウに表示される．



このような画面が表示されれば成功．「gretl: モデル」のウィンドウはまだ閉じない！

12. 出力された「gretl: モデル」のウィンドウのメニューバーから「ファイル」→「名前を付けて保存」と操作.
13. 「標準テキスト」を選び,「OK」をクリック.
14. results20210108.txt という名前で 2020microdatag フォルダに保存．すると，表示された推定結果をそのままテキストファイルで保存できる.

弾力性の推定結果

- 最寄り駅までの所要時間の係数
  - −0.0106653（符号は負）
  - 有意水準 1%で，係数ゼロの H_0 棄却.
    ➡ 「中古マンション価格」の「最寄り駅までの所要時間」に対する半弾力性は −0.0106653 で，統計的に有意にゼロと異なる.
    ➡ 築年数，面積，ワンルームかどうかを一定としたとき，最寄り駅までの所要時間が 1 分長くなるとマンションの市場価値は平均して 1.06653%安くなる傾向がある.
  - 最寄り駅までの所要時間は対数変換していないため，中古マンション価格と最寄り駅までの所要時間に関しては Log-Level モデルの関係になっていることに注意！

- 築年数の対数値の係数
  - −0.246296（符号は負）
  - 有意水準 1%で，係数ゼロの H_0 棄却．
    ➡ 「中古マンション価格」の「築年数」に対する弾力性は −0.246296 で，統計的に有意にゼロと異なる．
    ➡ 最寄り駅までの所要時間，面積，ワンルームかどうかを一定としたとき，築年数が 1%長くなるとマンションの市場価値は平均して 0.246296%安くなる傾向がある．
- 面積の対数値の係数
  - 1.02241（符号は正）
  - 有意水準 1%で，係数ゼロの H_0 棄却．
    ➡ 「中古マンション価格」の「面積」に対する弾力性は 1.02241 で，統計的に有意にゼロと異なる．
    ➡ 最寄り駅までの所要時間，築年数，ワンルームかどうかを一定としたとき，面積が 1%広くなるとマンションの市場価値は平均して 1.02241%高くなる傾向がある．

- ワンルームダミーの係数
  - −0.0931458（符号は負）
  - 有意水準 10%で，係数ゼロの H_0 棄却．
    ➥ 半弾力性は −0.0931458 で，統計的に有意にゼロと異なる．
    ➥ 最寄り駅までの所要時間，築年数，面積を一定としたとき，ワンルームのマンションはそれ以外の種類のマンションに比べ，マンションの市場価値は平均して 9.31458%安い傾向がある．
  - ワンルームダミーは対数変換していないため，中古マンション価格とワンルームダミーに関しては Log-Level モデルの関係になっていることに注意！

定数項の推定結果

- 定数項
  - 14.0373（符号は正）
  - 有意水準 1%で，係数ゼロの H_0 棄却．
    ➥ 定数項は統計的に有意にゼロと異なる．

自由度修正済み決定係数の計算結果

- 自由度修正済み決定係数
  - $\bar{R}^2 = 0.900041.$
    ➥ 「最寄り駅までの所要時間」と「築年数の対数値」と「面積の対数値」と「ワンルームダミー」は「中古マンション価格の対数値」の変動の約 90%を説明できている．

レポートや論文に変数を対数変換したモデルと，対数変換していないモデルの推定結果を載せる場合は，例えば以下のような表を載せればよい．

表 1　モデル推定結果

	モデル（1）			モデル（2）		
	偏回帰係数	標準誤差		偏回帰係数	標準誤差	
最寄り駅所要時間	−38.87	9.15	***	−0.01	0.00	***
築年数	−61.14	3.79	***	−0.25	0.01	***
面積	63.63	3.19	***	1.02	0.04	***
ワンルームダミー	−424.19	128.38	***	−0.09	0.05	*
定数項	1716.04	185.71	***	14.04	0.14	***
自由度修正済み決定係数	0.89			0.90		

（注 1）モデル（1）のすべての変数はレベル，モデル（2）の最寄り駅所要時間とワンルームダミーはレベル，モデル（2）の中古マンション価格（被説明変数）と築年数と面積は対数値である．
（注 2）表中の***，*はそれぞれ有意水準 1%，10%で統計的に有意であることを表す．
（注 3）不均一分散に対して頑健な標準誤差を用いている．
（注 4）観測値数は 194 である．

本日の作業はここまで.